Massimi e minimi

Massimi e minimi relativi - dimensione uno

Definizione

Definizione 1. *Siano K un insieme di $\mathbb{R}^d$ e $x_0 \in K$.*

- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **minimo (globale)** *in x_0 se*
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in K.$$
- *Diciamo che la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **massimo (globale)** *in x_0 se*
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in K.$$
- *Diciamo che $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **minimo locale (relativo)** *in x_0 se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in K \cap B_r(x_0).$$
- *Diciamo che $f : K \to \mathbb{R}$ ha un* **massimo locale (relativo)** *in x_0 se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in K \cap B_r(x_0).$$

Esempio 2.
- *La funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ha un minimo globale in 0.*
- *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha un minimo globale in 0.*
- *La funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|^2}$ ha un minimo globale in 0.*

Massimi e minimi locali in dimensione 1

Proposizione 3. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).*

(i) *Se f ha un massimo locale nel punto $t \in (a, b)$, allora $f'(t) = 0$.*

(ii) *Se f ha un minimo locale nel punto $t \in (a, b)$, allora $f'(t) = 0$.*

Proposizione 4 (Condizione necessaria negli estremi)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in b nel senso che esiste ed è finito il limite*
$$f'(b) := \lim_{t \to b_-} \frac{f(t) - f(b)}{t - b}.$$

(i) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale in b, allora $f'(b) \geq 0$.*

(ii) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un minimo locale in b, allora $f'(b) \leq 0$.*

Esempio 5. *La funzione $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ ha un massimo locale in $t = 1$. Calcolare $f'(1)$.*

Esempio 6. *La funzione $f : [-50, 3] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1 - (t - 3)^2$ ha un massimo locale in $t = 3$. Calcolare $f'(3)$.*

Proposizione 7 (Condizione sufficiente negli estremi)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in b (cioè esiste la derivata sinistra in b)*

(i) *Se $f'(b) > 0$, allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale in b.*

(ii) *Se $f'(b) < 0$, allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha un minimo locale in b.*

Proposizione 8 (Condizione al secondo ordine - condizione necessaria).
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).

(i) *Se f ha un massimo locale ed è derivabile due volte nel punto $t \in (a, b)$, allora*

$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) \geq 0.$$

(ii) *Se f ha un minimo locale ed è derivabile due volte nel punto $t \in (a, b)$, allora*

$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) \leq 0.$$

Proposizione 9 (Condizione al secondo ordine - condizione sufficiente).
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b).

(i) *Se f è derivabile due volte in $t \in (a, b)$ e*

$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) > 0,$$

allora f ha un massimo locale in t.

(ii) *Se f è derivabile due volte in $t \in (a, b)$ e*

$$f'(t) = 0 \quad e \quad f''(t) < 0,$$

allora f ha un minimo locale in t.

Esercizio 10. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. Quale delle seguenti condizioni garantisce l'esistenza di un massimo locale della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nel punto b?*

(1) $f'(b) > 0$ *e* $f''(b) < 0$;

(2) $f'(b) > 0$ *e* $f''(b) > 0$;

(3) $f'(b) = 0$ *e* $f''(b) < 0$;

(4) $f'(b) = 0$ *e* $f''(b) > 0$;

(5) $f'(b) < 0$ *e* $f''(b) < 0$;

(6) $f'(b) < 0$ *e* $f''(b) > 0$.

Massimi e minimi locali - condizioni al primo ordine

Massimi, minimi e gradiente in dimensione $d \geq 2$

Teorema 11 (Condizione necessaria al primo ordine).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in Ω.

(i) *Se f ha un massimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora $\nabla f(x) = 0$.*

(ii) *Se f ha un minimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora $\nabla f(x) = 0$.*

Massimi, minimi sul bordo di un insieme regolare

Esercizio 12. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *(l'ipotesi non è ottimale). Sia*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0\}.$$

Dimostrare che se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(x, 0)$*, allora*

$$\partial_y f(x, 0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_x f(x, 0) = 0.$$

Esercizio 13. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *(l'ipotesi non è ottimale). Sia*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0\}.$$

Supponiamo che il punto $(0, 0)$ *sia tale che*

$$\partial_y f(0, 0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(0, 0) > 0.$$

È vero che $(0, 0)$ *deve essere un punto di massimo per* $f : S \to \mathbb{R}$ *?*

Esercizio 14. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *(l'ipotesi non è ottimale). Sia*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0\}.$$

Supponiamo che il punto $(0, 0)$ *sia tale che*

$$\partial_y f(0, 0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(0, 0) = 0.$$

È vero che $(0, 0)$ *deve essere un punto di massimo per* $f : S \to \mathbb{R}$ *?*

Esercizio 15. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *(l'ipotesi non è ottimale). Sia*

$$\overline{B}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 0\}.$$

Dimostrare che:

(1) *se la funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(0, 1)$*, allora*

$$\partial_y f(1, 0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_x f(1, 0) = 0 \ ;$$

(2) *se la funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(1, 0)$*, allora*

$$\partial_x f(1, 0) \geq 0 \qquad e \qquad \partial_y f(1, 0) = 0 \ ;$$

(3) *se la funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $A := (\alpha, \beta) \in \partial B_1$*, allora*

$$\alpha\, \partial_x f(A) + \beta\, \partial_y f(B) \geq 0 \qquad e \qquad -\beta \partial_x f(A) + \alpha \partial_y f(A) = 0 \ .$$

Proposizione 16. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^1(\mathbb{R}^2)$*. Sia* $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^1(\mathbb{R})$ *e sia* S *l'insieme (detto sottografico di* η*)*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq \eta(x)\}.$$

Dimostrare che se la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $A = (\alpha, \eta(\alpha)) \in S$*, allora*

$$\partial_x f(A) + \eta'(\alpha) \partial_y f(A) = 0;$$

$$-\eta'(\alpha) \partial_x f(A) + \partial_y f(A) = 0.$$

Il vettore $\tau = \big(1, \eta'(\alpha)\big)$ si dice *tangente* al grafico della funzione η nel punto $(\alpha, \eta(\alpha))$.

Il vettore $n = \big(-\eta'(\alpha), 1\big)$ si dice *normale* (uscente da S) al grafico della funzione η nel punto $(\alpha, \eta(\alpha))$.

Massimi e minimi sul bordo di insiemi non lisci

Esercizio 17. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0, \ y \le 0\}$. *Dimostrare che se la funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo locale nel punto* $(0, 0)$*, allora*

$$\partial_y f(x, 0) \ge 0 \qquad e \qquad \partial_x f(x, 0) \ge 0.$$

Esercizio 18. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0, \ y \le 0\}$. *Dimostrare che se*

$$\partial_y f(0, 0) > 0 \qquad e \qquad \partial_x f(0, 0) > 0,$$

allora la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ *ha un massimo relativo nel punto* $(0, 0)$.

Soluzione: Osservare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\partial_x f > 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_y f > 0 \qquad \text{in} \qquad (-\varepsilon, 0] \times (-\varepsilon, 0].$$

Mostrare che per ogni $(x, y) \in (-\varepsilon, 0] \times (-\varepsilon, 0]$ si ha

$$f(x, y) \le f(0, y) \le f(0, 0).$$

Massimi e minimi locali - condizioni al secondo ordine

Condizione necessaria al secondo ordine

Definizione 19. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile due volte in* Ω, *e* $x \in \Omega$.

- *Diciamo che* $D^2 f(x) \ge 0$, *se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) \ge 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d.$$

- *Diciamo che* $D^2 f(x) > 0$, *se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d, \quad h \ne 0.$$

- *Diciamo che* $D^2 f(x) \le 0$, *se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) \le 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d.$$

- *Diciamo che* $D^2 f(x) < 0$, *se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) < 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d, \quad h \ne 0.$$

Teorema 20 (Massimi e minimi locali - condizioni necessarie)**.**
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^2(\Omega)$.

(i) *Se* f *ha un massimo locale nel punto* $x \in \Omega$, *allora*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) \le 0.$$

(ii) *Se* f *ha un minimo locale nel punto* $x \in \Omega$, *allora*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) \ge 0.$$

Condizioni sufficienti al secondo ordine

Esercizio 21 (Due direzioni non bastano)**.** *Trovare una funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- $\partial_x f(0,0) = \partial_x f(0,0) = 0$;
- $\partial_{xx} f(0,0) = 1 = \partial_{xx} f(0,0)$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *non ha un minimo locale in zero.*

Teorema 22 (Massimi e minimi locali - condizioni sufficienti)**.**
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^2(\Omega)$.

(i) *Se*
$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) > 0,$$
allora f *ha un massimo locale nel punto* $x \in \Omega$.

(ii) *Se*
$$\nabla f(x) = 0 \qquad e \qquad D^2 f(x) < 0,$$
allora f *ha un minimo locale nel punto* $x \in \Omega$.

Teorema 23 (Il caso $d = 2$)**.** *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione in* $C^2(\Omega)$. *Allora*

(i) $D^2 f(x,y) \geq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) \geq 0\ , \quad \partial_{yy} f(x,y) \geq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) \geq 0\ .$$

(ii) $D^2 f(x,y) > 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) > 0\ , \quad \partial_{yy} f(x,y) > 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) > 0\ .$$

(iii) $D^2 f(x,y) \leq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) \leq 0\ , \quad \partial_{yy} f(x,y) \leq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) \geq 0\ .$$

(iv) $D^2 f(x,y) \leq 0$ *se e solo se*
$$\partial_{xx} f(x,y) < 0\ , \quad \partial_{yy} f(x,y) < 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) > 0\ .$$

Massimi e minimi locali - esercizi

Esercizio 24. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Sia* $D \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme* $[0,1] \times [0,1]$ *e sia* A *il punto* $(1, y_0)$ *con* $0 < y_0 < 1$. *Se* A *è un punto di massimo locale per* f *in* D, *allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\partial_x f(A) = 0$;

(b) $\partial_y f(A) = 0$;

(c) $\nabla f(A) = 0$;

(d) $\nabla f(A) \perp (1,0)$;

(e) $\nabla f(A) \perp (1,1)$;

(f) $\nabla f(A) \perp (0,1)$;

(g) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$;

(h) $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;

(i) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$ *e* $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;

(j) $D^2 f(A) \leq 0$.

Esercizio 25. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*. Sia* $D \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme* $[0,1] \times [0,1]$ *e sia* A *il punto* $(1, y_0)$ *con* $0 < y_0 < 1$*. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che* A *sia un punto di massimo locale per* f *in* D*?*

(a) $\partial_y f(A) = 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$;

(b) $\nabla f(A) = 0$, $\partial_x^2 f(A) < 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$;

(c) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) > 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$;

(d) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) = 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$;

(e) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) > 0$ *e* $\partial_x^2 f(A) < 0$;

(f) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) = 0$ *e* $\partial_x^2 f(A) < 0$;

(g) $\nabla f(A) = 0$ *e* $D^2 f(A) < 0$.

Esercizio 26. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*. Sia* $D \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme* $[0,1] \times [0,1]$ *e sia* B *il punto* $(1,1)$*. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che* B *sia un punto di massimo locale per* f *in* D*?*

(a) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;

(b) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) > 0$;

(c) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) > 0$ *e* $D^2 f(A) > 0$;

(d) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) > 0$ *e* $D^2 f(A) < 0$;

(e) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) \geq 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$;

(f) $\partial_x f(A) > 0$, $\partial_y f(A) \geq 0$ *e* $\partial_x^2 f(A) < 0$;

(g) $\partial_x f(A) = 0$, $\partial_y f(A) = 0$, $\partial_x^2 f(A) < 0$ *e* $\partial_y^2 f(A) < 0$.

Esercizio 27. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $A = (\alpha, \beta) \in \partial B_1$ *un punto con coordinate* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$*. Se* A *è un punto di massimo locale per* f *in* $\overline{B}_1$*, allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\nabla f(A) = 0$;

(b) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) = 0$;

(c) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;

(d) $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$;

(e) $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;

(f) $D^2 f(A) \leq 0$;

(g) $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \beta^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) \leq 0$;

(h) $\beta^2 \partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) - 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) \leq 0$.

Esercizio 28. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*. Quali delle condizioni seguenti garantiscono che il punto* $A = (\alpha, \beta) \in \partial B_1$*, dove* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$*, sia un punto di massimo locale per* f *in* $\overline{B}_1$*?*

(a) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;

(b) $\nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;

(c) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $D^2 f(A) < 0$;

(d) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\partial_{xx} f(A) < 0$, $\partial_{yy} f(A) < 0$;

(e) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \beta^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) < 0$;

(f) $(\alpha, \beta) \cdot \nabla f(A) > 0$, $(-\beta, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$, $\beta^2 \partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) - 2\alpha\beta \partial_{xy} f(A) < 0$.

Esercizio 29. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2*. Sia* D *l'insieme*

$$D := \left\{ (x, y) \ : \ y \leq \frac{1}{2} x^2 \right\}$$

e sia $A = (\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2) \in \partial D$*. Se* A *è un punto di massimo locale per* f *in* $\overline{B}_1$*, allora (fra le seguenti, selezionare le condizioni necessarie):*

(a) $\nabla f(A) = 0$;

(b) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) = 0$;

(c) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;

(d) $(1, \alpha) \cdot \nabla f(A) \leq 0$;

(e) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) = 0$;

(f) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) \geq 0$;

(g) $(-\alpha, 1) \cdot \nabla f(A) \leq 0$;

(h) $D^2 f(A) \leq 0$;

(i) $\partial_{xx} f(A) \leq 0$ *e* $\partial_{yy} f(A) \leq 0$;

(j) $\partial_{xx} f(A) + \alpha^2 \partial_{yy} f(A) + 2\alpha \partial_{xy} f(A) \leq 0$;

(k) $\alpha^2 \partial_{xx} f(A) + \partial_{yy} f(A) - 2\alpha \partial_{xy} f(A) \leq 0$.